3S1-3

高次 ARX モデル推定に基づくシステム同定法

System identification method based on high order ARX model estimation

慶應義塾大学　○ 室井 秀夫，足立 修一
Hideo Muroi and Shuichi Adachi
Keio University

Abstract System identification is a method to obtain mathematical models by using input and output data. However, models obtained by the conventional system identification method often have complex structure with high order. It is difficult to use them for control system design. In this report, we propose a method to obtein an accurate low order model by model reduction after estimating a high order ARX model.

1 はじめに

入出力データから対象システムのモデリングを行うシステム同定法は，制御のためのモデリング法として広く利用されるようになってきた。しかしながら，雑音レベルが大きかったり，モデルの不確かさが無視できない場合には，通常，システム次数よりも高次のモデルを用いてシステム同定を行わなければならない。システム同定法として，ARX（Auto-Regressive with eXogenous）モデルを用いた最小二乗法 [1] が最もよく知られているが，特に，ARX モデル同定を行う場合には，システムモデルと雑音モデルの一部が共通であるため，高次同定を行う必要がある。したがって，同定された高次モデルをいかに低次元化して，制御のための低次公称モデルを得るかは重要な課題である。

本稿ではまず，高次 ARX モデルを推定後，データに基づいて低次元化を行う漸近法（asymptotic method : ASYM）[2],[3] の手順を紹介する。そして，低次元化法としてよく知られている平衡実現と漸近法の比較を行い，制御のためのモデリング法としての性能を比較する。なお本稿では，対象システムは線形時不変，１入力１出力と仮定し，同定実験は開ループで行われるものとする。

2 ARX モデルの最小二乗推定

ARX モデルは次式であらわされる。

$$A(q)y(t) = B(q)u(t) + \varepsilon(t) \tag{1}$$

ただし，$A(q)$，$B(q)$ は以下のとおりである。

$$A(q) = 1 + a_1q^{-1} + \cdots + a_nq^{-n}$$
$$B(q) = b_1q^{-1} + \cdots + b_nq^{-n}$$

ここで，$u(t)$ は入力，$y(t)$ は出力，$\varepsilon(t)$ は式誤差である。このモデルのパラメータは式誤差の二乗和を最小化するように最小二乗法を用いて決定される。この方法は簡単に ARX モデルのパラメータを推定できる一方，式誤差 ε が白色でないときは推定値にバイアスが生じ，また高周波帯域に重みがかかってしまう，といった問題点をもつ。

3 漸近法

ARX モデルの最小二乗推定の問題点を補う方法として，高次 ARX モデルを推定し，漸近理論にしたがい低次元化する方法が提案されている。この方法は漸近法と呼ばれ，以下の二つのステップからなる。

ステップ 1：高次 ARX モデルの同定

システムが以下のように表わされるとする。

$$y(t) = \frac{B(q)}{A(q)}u(t) + \frac{D(q)}{C(q)}e(t) \tag{2}$$

ただし，$e(t)$ は白色雑音である。式 (2) の両辺を $D(q)/C(q)$ で割ると，

$$A'(q)y(t) = B'(q)u(t) + e(t) \tag{3}$$

が得られる。ただし，$A'(q) = C(q)/D(q)$，$B'(q) = B(q)C(q)/A(q)D(q)$ とおいた。これは式 (1) と同じ形であり，高次 ARX モデルで同定が可能であることを示唆している。同定されたシステム，雑音の伝達関数の推定値はそれぞれ $\hat{G}^n(q) = B'(q)/A'(q)$，$\hat{H}^n(q) = 1/A'(q)$ となることがわかる。

このとき用いる ARX モデルの次数 n はサンプル数 N に対して次式を満たすように十分大きくとらなければならない。

$$n(N) \to \infty \ \text{ as } N \to \infty$$
$$n^2(N)/N \to 0 \ \text{ as } N \to \infty \tag{4}$$

ステップ 2：低次元化

得られた高次 ARX モデルを漸近理論にしたがって低次元化する。漸近理論から得られる対数尤度関数は，

$$V = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\hat{G}^n(e^{i\omega}) - \hat{G}^l(e^{i\omega})\right|^2 \frac{\Phi_u(\omega)}{\Phi_v(\omega)}\mathrm{d}\omega \tag{5}$$

となる。ただし，$\hat{G}^n(q)$，$\hat{G}^l(q)$ はそれぞれ低次元化前，低次元後の伝達関数で，Φ_u，Φ_v はそれぞれ入力と雑音のスペクトルである。

この尤度関数を最小化するために，Wahlberg は周波数重み付き平衡実現を，Zhu は出力誤差法をそれぞれ用いているが、本稿では後者を紹介する。

まず，ステップ 1 で得られた雑音の伝達関数 $1/\hat{H}^n(q)$ で，同定実験に使用した入力 $u(t)$ を次式のようにフィルタリングする。

$$u_f(t) = \frac{1}{\hat{H}^n(q)}u(t) = A(q)u(t) \tag{6}$$

ただし，$u_f(t)$ はフィルタリング後の入力である。つぎにこの入力 $u_f(t)$ を用いて，高次のプロセスモデル $\hat{G}^n(q)$ のシミュレーションを行う。すると

$$y_f(t) = \hat{G}^n(q)u_f(t) = \frac{\hat{B}^n(q)}{\hat{A}^n(q)}u_f(t) \tag{7}$$

が得られる。最後に，これらの入出力データ $u_f(t)$，$y_f(t)$ を用いて出力誤差法による低次元化を行う。出力誤差法の損失関数は次式のようになる。

$$\begin{aligned} V &= \sum_{t=1}^{N}\left\{\left[\hat{G}^n(q) - \hat{G}^l(q)\right]u_f(t)\right\}^2 \\ &= \sum_{t=1}^{N}\left\{\left[\hat{G}^n(q) - \hat{G}^l(q)\right]\frac{u(t)}{\hat{H}^n(q)}\right\}^2 \end{aligned} \tag{8}$$

式 (8) を $N \to \infty$ とし，パーセバルの等式を適用すると次式のようになる。

$$V = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\hat{G}^n(e^{i\omega}) - \hat{G}^l(e^{i\omega})\right|^2\frac{\Phi_u(\omega)}{H(e^{j\omega})}\mathrm{d}\omega \tag{9}$$

式 (9) は式 (5) と同じ形となるため，式 (8) を最小化することは最尤推定量を得られることを意味する。

4　数値実験例

以下に示す 4 次のシステムを対象とする。

$$y(t) = \frac{B(q)}{A(q)}u(t) + \frac{1}{C(q)}e(t) \tag{10}$$

ただし，$A(q)$,$B(q)$,$C(q)$ はそれぞれ以下の通りとした。

$$A(q) = 1 - 2.58q^{-1} + 2.99q^{-2} - 2.13q^{-3} + 0.741q^{-4}$$

$$B(q) = -0.198q^{-1} - 0.479q^{-2} + 0.521q^{-3} + 0.172q^{-4}$$

$$C(q) = 1 - 0.6q^{-1}$$

この対象に 40000 サンプルのランダム二値信号を 10 回入力した。ただし $e(t)$ は白色雑音でその NS 比は -10 dB (30 %) とした。また，サンプリング周期を 0.06 sec とした。このとき，4 次の OE モデル，BJ モデルと，200 次で推定された ARX モデルを低次元化した 4 次平衡実現打ち切りモデル，漸近モデルを回数ごとに推定し，周波数重みつき出力誤差基準を用いて比較を行った。周波数重みつき出力誤差基準は次式のように表す。

$$V_F = \int_{\omega_1}^{\omega_2}(G^o(e^{j\omega}) - \hat{G}(e^{j\omega}))\Phi_u\mathrm{d}\omega \tag{11}$$

この基準の ω_1，ω_2 は制御に使用する帯域を指定する。今回は 0.1 ～ 5 Hz を使用すると仮定した。この基準の 10 回の平均値を Table 1 に示した。また，Fig.1 に推定されたそれぞれのモデルの周波数応答の一例を示した。図において，黒線で示した平衡実現以外のモデルはほぼ真の伝達関数に一致していた。使用帯域では平衡実現打ち切りモデルよりも，漸近法を用いたモデルの方がよりよいフィッティングを示した。また，漸近法は従来法と比べて同程度以上の精度をもつことが確認された。

Table 1 Frequency weighted output error criterion

Method	Criterion
Balanced realization	1.79×10^{-2}
ASYM method	3.06×10^{-4}
OE model (output error method)	7.07×10^{-4}
BJ model (prediction error method)	9.79×10^{-4}

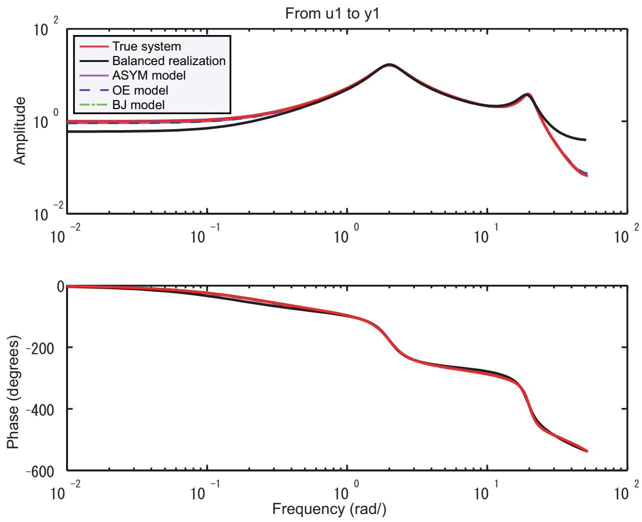

Fig.1 Frequency responce

5　おわりに

本稿では，高次 ARX モデル推定を行い，得られたモデルを低次元化する漸近法を紹介し，数値例を通してその性能について調べた。その結果，漸近法は従来法と比べて同程度以上の精度をもつことが確認された。

参考文献

[1] 足立 修一：MATLAB による制御のためのシステム同定; 東京電機大学出版局 (1996)

[2] B.Wahlberg：Model reduction of high-order estimated models: the asymptotic ML approach; Int. J. Control, Vol. 49, No.1, pp. 169–192 (1989)

[3] Y.Zhu：Multivariable System Identification for Process Control, Pergamon (2001)