

周波数領域におけるシステム同定の性能評価

足立 修一 室井 秀夫 (慶應義塾大学)

Performance Evaluation of System Identification in Frequency Domain

*S. Adachi and H. Muroi (Keio University)

Abstract— In this report, performance evaluation of system identification is considered in frequency domain. First, procedure of system identification is briefly summarized by using simple numerical examples. Second, system identification problem is formulated. Finally, asymptotic theory is presented for both open-loop and closed-loop system identification problems.

Key Words: System identification, frequency domain, asymptotic theory.

1 まえがき

さまざまな制御系設計法が存在するが、その中で制御対象のモデリング結果に基づいて制御系設計を行うモデルベース制御 (Model-Based Control: MBC と略記) は、最適制御やロバスト制御などに代表されるように、理論面においては従来から中心的な研究課題であった。それに加えて、近年では自動車産業をはじめとする産業応用面においても MBC に対する関心が高まっている。MBC を実問題に適用する際のボトルネックは「モデリング」である。残念ながら、いまだに決定的な制御のためのモデリング法は存在せず、つねにその時代時代における重要な研究課題になっている。

本稿では、制御のためのモデリング法の一つである「システム同定法」¹⁾ について考える。特に、システム同定の性能評価について考察する。もともと、予測誤差法に代表されるシステム同定法はパラメータ推定問題に帰着することから、システム同定結果の評価はパラメータ推定値の統計性 (不偏性や有効性など) を用いて行われることが多かった。これは統計理論的には大変興味深い問題であるが、現実問題を考えると、

- (1) 制御対象の「真の」パラメータは存在するだろうか?
- (2) 制御対象の構造と、その制御のための数学モデルの構造は同じだろうか?

など、さまざまな疑問が湧き上がっている。

特に、システム同定は、通常、離散時間モデルを用いて行われるため、ほとんどの場合、そのパラメータ推定値と物理パラメータ値の関係は簡単ではない。そのため、制御技術者は、伝達関数や状態方程式の個々のパラメータ値ではなく、着目する周波数帯域における同定精度に興味をもつことが多い。

そこで、本稿では、線形システム同定問題に話題を限定し、まず、システム同定法を実問題に適用する際の注意点をまとめる。つぎに、開ループ・閉ループシステムの双方のシステム同定問題に対して、周波数領域におけるシステム同定精度について考察する。

2 システム同定を行うときに悩むこと

システム同定を行う場合、ユーザはさまざまなパラメータや方法を選定しなければならない。たとえば、システム同定の基本的な手順において、

- Step 1 同定実験の設計: 同定入力, サンプル周期
- Step 2 同定実験: 同定実験時間
- Step 3 入出力データの前処理: デシメーション
- Step 4 構造同定: 同定モデルの次数, むだ時間
- Step 5 パラメータ推定: システム同定アルゴリズム

などを選定しなければならない。これらの調整によって、システム同定性能の向上が図れるのだが、特にシステム同定の初心者にとっては、その選定は厄介なものであり、システム同定を敬遠してしまう大きな理由にもなっている。以下では、これらを選定する際の注意点をまとめておこう。

2.1 システム同定入力の選定

最初は、同定入力として M 系列信号のような擬似ランダム二値信号を用いるべきである。その理由は以下のとおりである。

振幅の面から 線形システムは二値信号で同定できる。周波数の面から 対象のすべてのモードを励起したいため、ほとんどすべての周波数成分をもっている M 系列信号は PE 性 (Persistently Exciting) の面から望ましい。

最大振幅の面から 波高率 (crest factor) を

$$C_r = \frac{\max_k u(k)}{\sqrt{\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u^2(k)}} \quad (1)$$

で定義する。波高率が小さいことは、同じパワーをもつ信号の中で最大振幅が小さいことを意味する。いま、M 系列信号の波高率は 1 (これは波高率の最小値) である。アクチュエータの非線形性として飽和特性を考えた場合、同じパワーの信号であれば、最大振幅が小さい方が飽和非線形性に対処できるため、波高率が小さな M 系列信号はシステム同定入力として適している。

しかしながら、M 系列信号を同定入力とするのは、システム同定の第一段階であり、実際には同定対象、同定の目的、そしてシステム同定法などに依存した望ましい同定入力信号が存在する。

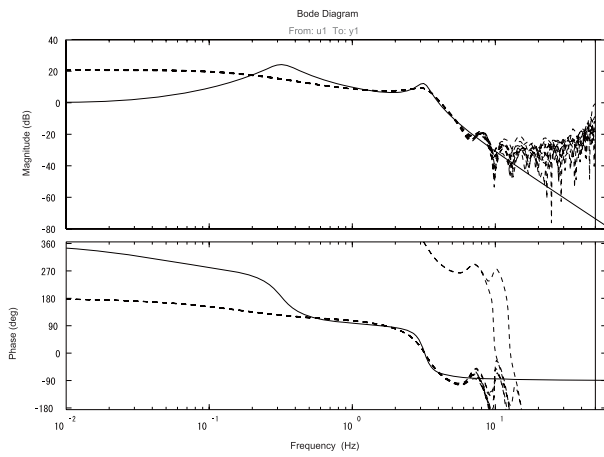


Fig. 1: $T = 0.01$ s のときの同定結果 (実線: 真値, 破線: 10 回の推定値)

2.2 サンプルング周期の選定

つぎの連続時間システムを同定する問題を考えよう。

$$G(s) = \frac{\omega_1^2 \omega_2^2 (-Ts + 1)}{(s^2 + 2\zeta_1 \omega_1 s + \omega_1^2)(s^2 + 2\zeta_2 \omega_2 s + \omega_2^2)} = \frac{-6400s + 1600}{s^4 + 5s^3 + 408s^2 + 416s + 1600} \quad (2)$$

ただし, $T = 4$, $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 20$, $\zeta_1 = 0.25$, $\zeta_2 = 0.1$ とおいた。このシステムは, 非最小位相系, 2 つの共振ピークをもつ振動系で, 相対次数が 3 であり, その周波数特性を Fig. 1 に実線で示した。これは同定しにくいシステムとして知られている。

いま, 同定入力として M 系列信号を印加し, SN 比が 20 dB の正規性白色雑音を出力に加え, 1000 個の入出力信号を数値シミュレーション実験により収集した。得られた入出力データに対して 30 次の ARX (Auto Regressive with eXogenous) モデルのパラメータを最小二乗法により推定し, それより周波数伝達関数を計算した。なお, 雑音の初期値を変えて 10 回試行した。

まず, サンプルング周期を $T = 0.01$ s とした場合の周波数伝達関数の同定結果を Fig. 1 に破線で示した。図より, かなり 2 次振動モードは同定できているが, それより低い帯域ではゲイン・位相特性ともに, 推定値は真値と大きくかけ離れた値をとっている。そこで, サンプルング周期が 10 倍の $T = 0.1$ s とした場合の同定結果を Fig. 2 に示した。図より 2 つの振動ピークを精度よく同定できている。このように, データ収集の際のサンプルング周期の値が 10 倍違っただけで, 周波数領域における同定精度は大きく変化してしまうことに注意する。特に, 実システムのサンプルング周期は, デジタル制御系の実装の観点から選定されることが多いので, 非常に短いものが選ばれている場合が多い。そのようなサンプルング周期ではシステム同定にとっては短すぎるため, デシメーションと呼ばれるデジタル信号処理を用いて, 荒いサンプルング周期に変換した後に, 同定アルゴリズムを適用すべきである。

サンプルング周期の選定指針の一つに, 「着目する周波数帯域の 10 倍程度のサンプルング周波数を用いる」というものがある。この例題では, 2 次振動モードの周

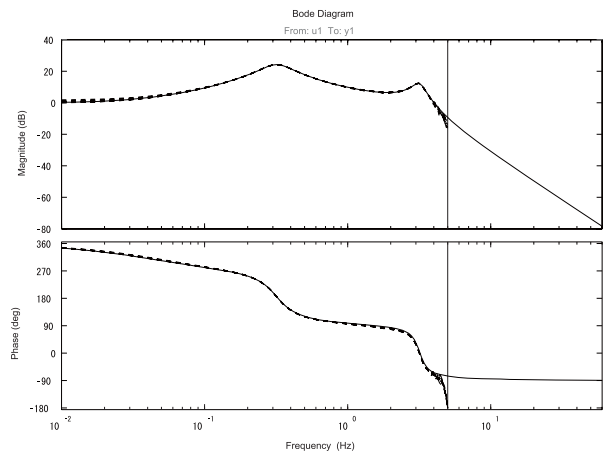


Fig. 2: $T = 0.1$ s のときの同定結果 (実線: 真値, 破線: 10 回の推定値)

波数が 20 rad/s \approx 3 Hz なので, サンプルング周波数はその 10 倍の 30 Hz くらいに設定すべきであり, それは $T \approx 0.03$ s に対応する。しかし, 1 次振動モードを同定しようとすると, サンプルング周期はその 10 倍の $T \approx 0.3$ s にすべきである。したがって, その中間の値である $T = 0.1$ s とすると, Fig. 2 に示したように 1, 2 次振動モードを両方とも同定できたのである。図より, 1 次振動モードより低域では, 周波数領域における推定値は若干, 真値とずれている。この帯域を精度よく同定しようと思ったら, $T = 0.1$ s よりも荒いサンプルング周期に変換する必要がある。

関連する重要なポイントは, 最小二乗法のようなシステム同定法を用いて精度よいシステム同定が行える周波数帯域は, たかだか 1 ~ 2 デカド (10 倍から 100 倍の周波数帯域) にすぎないという点である。この点からも, 制御系設計において重要な帯域に焦点をあわせた適切なサンプルング周期を選定することは非常に重要である。

2.3 モデル次数の選定

制御のためのモデリングを行う際, 「モデルとは, 対象の本質的な部分に焦点を当て, 特定の形式で表現したものであり, 必ず何らかの不確かさを含んでいる」ということを心に留めておかなければならない。1980 年代以降のロバスト制御の発展に伴い, この事実は広く認識されるようになった。すなわち, 現実の制御対象は, おそらく非線形で, 高次システムで, 場合によっては分布定数システムかもしれないが, 制御系設計のための公称モデルとして, われわれは通常, 低次モデルを利用するので, モデルにはさまざまな不確かさが存在する。

システム同定を行うときに問題となることの一つに, 同定モデルの次数選定がある。モデル次数選定という用語に AIC (赤池情報量規範) を思い浮かべるだろう。AIC はモデルの適合度と複雑さの両面を考慮した, 時系列モデルのための合理的な次数選定法であるが, 制御のためのモデリングの立場に立つと, 制御系設計の観点や対象についての物理的な知見からモデル次数を選ぶほうが自然である。

しかしながら, たとえば制御対象の公称部分が 2 次

振動系であることが事前に既知であったとしても、最初から2次モデルを用いてシステム同定すると、満足する同定結果が得られない場合が多い。この問題を解決するためには、高次モデルを用いてシステム同定を行い、その後モデル低次元化によって低次公称モデルを求める方法がある。

2.4 システム同定法の選定

システム同定の教科書を読むと、いろいろな同定モデルとさまざまなシステム同定法が紹介されているが、まずは、ARXモデルを用いて最小二乗法でシステム同定することから始めるとよい。

3 システム同定問題の定式化

Fig. 3に閉ループシステム同定を含む一般的なシステム同定問題のブロック線図を示した。なお、ここではすべて離散時間表現されていると仮定する。

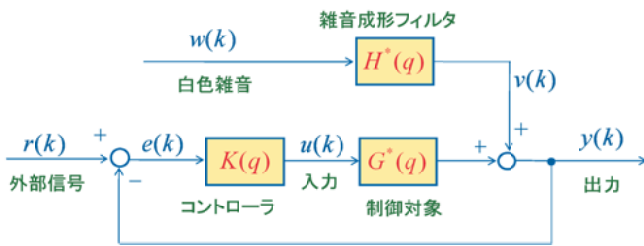


Fig. 3: システム同定問題

図より、制御対象の入力信号 $u(k)$ と $y(k)$ は

$$y(k) = G^*(q)u(k) + H^*(q)w(k) \quad (3)$$

を満たす。ここで、 $*$ は真値を表す。ただし、 $w(k)$ は平均値 0、分散 σ_w^2 の正規性白色雑音とする。また、 $G^*(q)$ は制御対象の、 $H^*(q)$ は雑音成形フィルタの伝達関数であり、それぞれ次式で与えられる。

$$G^*(q) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k^* q^{-k}, \quad H^*(q) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} h_k^* q^{-k}$$

ここで、 q は時間シフト演算子である。また、 g_k^* は制御対象の、 h_k^* は雑音成形フィルタのインパルス応答である。Fig. 3において、 $K(q)$ はコントローラ、 $r(k)$ は外部信号（通常は目標値）、 $e(k)$ は偏差である。

以上の準備の下で、本稿で考えているシステム同定問題をまとめるとつぎのようになる。

【システム同定問題】 有限個の入出力データ

$$\mathcal{Z}^N = \{u(i), y(i) : i = 1, 2, \dots, N\} \quad (4)$$

に基づいて対象の伝達関数 $G^*(q)$ （場合によっては雑音成形フィルタ $H^*(q)$ も）の推定値を得ること。◇

これを一般的な式を使った問題設定にしよう。まず、次式の同定モデルを用いる。

$$y(k) = G(q, \theta)u(k) + H(q, \theta)\varepsilon(k, \theta) \quad (5)$$

ここで、 θ は同定モデルに含まれるパラメータより構成されるベクトルであり、 $\varepsilon(k, \theta)$ は

$$\begin{aligned} \varepsilon(k, \theta) &= y(k) - \hat{y}(k|\theta) \\ &= H^{-1}(q, \theta)[y(k) - G(q, \theta)u(k)] \end{aligned} \quad (6)$$

で定義される予測誤差である。パラメータ推定のための評価規範として、予測誤差の二乗平均

$$J_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varepsilon^2(k, \theta) \quad (7)$$

を用いる。以上の準備の下で、予測誤差法に基づくシステム同定問題は、システム同定実験により収集された入出力データ \mathcal{Z}^N に基づいて、(7) 式の評価規範を最小にするパラメータベクトル θ を推定すること、すなわち、

$$\hat{\theta}_N = \arg \min_{\theta} J_N \quad (8)$$

を見つけることである。

4 漸近理論

(5) 式で与えたモデルのパラメータ θ を予測誤差法により推定し、(8) 式のパラメータ推定値 $\hat{\theta}_N$ が得られたものとする。

前述したように、同定モデルを制御系設計に用いる場合、パラメータ推定値 $\hat{\theta}_N$ の値よりも、その推定値より構成される周波数伝達関数 $\hat{G}_N^n(e^{j\omega})$ 、 $\hat{H}_N^n(e^{j\omega})$ に興味がある場合が多い。ただし、つぎのようにおいた。

$$\text{システムの推定値: } \hat{G}_N^n(e^{j\omega}) = G(e^{j\omega}, \hat{\theta}_N)$$

$$\text{雑音モデルの推定値: } \hat{H}_N^n(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}, \hat{\theta}_N)$$

さて、ARXモデルを用いてシステム同定を行う場合、システムの次数よりも高次のモデル（たとえば、10、20次、あるいはそれ以上）を用いたほうが、システムの周波数特性を精度よく同定できることが、経験的にも理論的にも知られていた。そこで、本節では、モデル次数 n と入出力データ数 N が無限大に向かうとき、すなわち、漸近的な場合について考えてみよう。

高次システム同定を行うための仮定を設ける。

- 次数とデータ数：次数をデータ数の関数とすると、すなわち、 $n(N)$ とおくと、次式が成り立つ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(N) = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(N)}{N} = 0$$

- 入力 $u(k)$ （閉ループ同定の場合には、外部信号 $r(k)$ ）が任意の次数の PE 性信号、すなわち、入力信号のパワースペクトル密度関数 $\Phi_u(\omega)$ は次式を満たす。

$$\Phi_u(\omega) > 0, \quad -\pi \leq \omega < \pi$$

以上の準備のもとで、Ljung らによる漸近理論が得られる。

【漸近理論】 予測誤差法の評価規範を最小にすることにより、大域的な最小値が得られ、次式が成り立つ。

- 一致性 (consistency)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} \hat{G}_N^n(e^{j\omega}) \\ \hat{H}_N^n(e^{j\omega}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{G}^*(e^{j\omega}) \\ \hat{H}^*(e^{j\omega}) \end{bmatrix}, \quad \text{w.p.1} \quad (9)$$

- 漸近正規性 (asymptotic normality)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{N} \begin{bmatrix} \hat{G}_N^n(e^{j\omega}) - E[\hat{G}_N^n(e^{j\omega})] \\ \hat{H}_N^n(e^{j\omega}) - E[\hat{H}_N^n(e^{j\omega})] \end{bmatrix} = N(\mathbf{0}, \mathbf{P}_n(\omega)) \quad (10)$$

ただし,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathbf{P}_n(\omega) &= \Phi_v(\omega) \Phi^{-1}(\omega) \\ \Phi(\omega) &= \begin{bmatrix} \Phi_u(\omega) & \Phi_{wu}(\omega) \\ \Phi_{uw}(\omega) & \sigma_w^2 \end{bmatrix} \\ \Phi_v(\omega) &= \sigma_w^2 |H^*(e^{j\omega})|^2 \end{aligned}$$

ただし, $\Phi_v(\omega)$ は雑音 $v(k)$ のパワースペクトル密度関数, $\Phi_{wu}(\omega)$ は雑音 $w(k)$ と入力 $u(k)$ の相互スペクトル密度関数である。◇

この漸近理論の意味することをまとめておこう。

- 周波数伝達関数の推定値は一致推定値である。
- 各周波数における周波数伝達関数の誤差は, 漸近的に平均値 $\mathbf{0}$, 共分散行列 $\mathbf{P}_n(\omega)$ の正規分布にしたがう。
- この結果は, $N \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$ の漸近的な状況を考えているため, ノンパラメトリックモデルと等価になる。すなわち, 利用するパラメトリックモデルの構造とは独立な結果である。
- この結果は, 閉ループシステム同定問題に対しても同様に成り立つ。

詳しい計算は省略するが, 漸近理論を用いると, 閉ループシステム同定を含む一般的なモデルの漸近分散は

$$\text{var} \left| \hat{G}_N^n(e^{j\omega}) \right| \approx \frac{n}{N} \frac{\sigma_w^2 \Phi_v(\omega)}{\sigma_w^2 \Phi_u(\omega) - |\Phi_{uw}(\omega)|^2} \quad (11)$$

で与えられる。ただし, σ_u^2 は入力の分散である。ここで, 入力 $u(k)$ は

$$u(k) = K(q)S^*(q)r(k) - K(q)S^*(q)H^*(q)w(k) \quad (12)$$

で表される。ただし,

$$S^*(q) = \frac{1}{1 + G^*(q)K(q)} \quad (13)$$

は感度関数である。

(12) 式より, 閉ループシステム同定の場合, 外部信号 $r(k)$ が利用できない場合でも, 雑音 $w(k)$ の存在により, 入力信号の PE 性を確保することが可能である。しかしながら, 通常, 多数の周波数成分を含む $r(k)$ を用いた方が閉ループシステムは, より同定しやすくなる。また, $r(k)$ はフィルタ $K(q)S^*(q)$ を通り, 入力の一部になる。このため, $r(k)$ として白色雑音を入力しても, $K(q)S^*(q)$ の周波数特性により成形された周波数成分が入力されることに注意する。

さて, 外部信号 $r(k)$ と雑音 $w(k)$ は一般に無相関なので, (12) 式より入力のスペクトル密度関数は次式となる。

$$\begin{aligned} \Phi_u(\omega) &= |K(e^{j\omega})|^2 |S^*(e^{j\omega})|^2 \Phi_r(\omega) \\ &+ \sigma_w^2 |K(e^{j\omega})|^2 |S^*(e^{j\omega})|^2 |H^*(e^{j\omega})|^2 \end{aligned} \quad (14)$$

また, 入力 u と雑音 w の相互スペクトル密度関数は,

$$\Phi_{uw}(\omega) = -\sigma_w^2 K(e^{j\omega})S^*(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}) \quad (15)$$

で与えられる。(14), (15) 式を (11) 式に代入すると, つぎの結果が得られる。

【モデルの漸近分散】

$$\text{var} \left| \hat{G}_N^n(e^{j\omega}) \right| \approx \frac{n}{N} \frac{1}{|K(e^{j\omega})|^2 |S^*(e^{j\omega})|^2} \frac{\Phi_v(\omega)}{\Phi_r(\omega)}$$

この結果が意味することをまとめておこう。

- ある周波数 ω におけるモデルの分散は, 出力雑音と外部同定信号の比, すなわち, SN 比に比例する。
- $n/N \approx 1/N$ なので, 漸近分散は $1/N$ のオーダーで減少する。
- 漸近分散は感度関数 S^* の二乗に反比例する。すなわち, フィードバック制御の効果で低感度化されている周波数帯域の漸近分散は増加してしまう。制御が効いている帯域での同定は難しい!
- 閉ループ同定の場合, モデル精度を向上させるためには, 外部入力信号を印加する必要がある。

開ループ同定の場合, $\Phi_{uw}(\omega) = 0, \forall \omega$ なので, (11) 式はつぎのように簡単になる。

【モデルの漸近分散 (開ループ同定の場合)】

$$\text{var} \left| \hat{G}_N^n(e^{j\omega}) \right| \approx \frac{n}{N} \frac{\Phi_v(\omega)}{\Phi_u(\omega)} \quad (16)$$

この結果より, 開ループシステム同定の場合には, ある周波数 ω におけるモデルの分散は, データ数 N に反比例し, モデル次数 n に比例する。また, その周波数における同定入力と雑音の SN 比がよいほど分散は小さくなるのがわかる。したがって, 「着目する周波数帯域において精度よいモデルを構築するためには, その周波数帯域において大きなパワーをもつ入力信号を用いるべきである。」たとえば, プロセス制御系における「着目する周波数帯域」とは, 中間周波数帯域, すなわち, ゲインが 0 dB と交差する周波数, あるいは位相が 180 deg 遅れる周波数を中心とする帯域である。この結論より, 必ずしも周波数特性が平坦な M 系列信号が最良の同定入力信号ではないことがわかる。なお, この結果は, データ数とモデル次数が十分大きな場合に対するものであり, 有限個の入出力データから同定を行う場合には必ずしもこの結果が成り立つものではないことに注意する。

5 おわりに

本稿では, 制御のためのモデリングの一つであるシステム同定を紹介し, その周波数領域における同定精度について, サンプリング周期, 漸近理論などの観点から考察した。

参考文献

- 1) 足立修一: 周波数領域におけるシステム同定の性能評価, 計測と制御 特集 次世代プラント操業に期待される制御技術, Vol. 47, No. 11 (2008, 掲載予定) (本稿の詳細版がこの文献である。)